LEGEA LUI NEWTON ÎNTRE MOMENTUL 1687 ȘI SFÂRȘITUL SECOLULUI AL XX-LEA

Mihai ALEXANDRESCU[1], Ștefan - Florin BĂLAN[2]
andreikness@yahoo.com; stefanbalan@hotmail.com

ABSTRACT: The following paper is a modest homage to the personality of Isaac Newton (1643-1727) at the 375-th anniversary of his birth; just a year ago, 330 years have passed since the publication of the first edition of the famous fundamental work PHYLOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA, which many scientists consider to be one of the brightest scientific achievements of all time. For reasons that will be mentioned in the right place, this paper is limited to some aspects of the second postulate (the Basic Law of Classical Mechanics), which is analyzed in three respects: (i) as mechanical causality, (ii) as a basic objective for the definition of equivalent force systems (the group of elementary equivalence operations of the competing force systems and the extension to some force systems) and the classification system for force systems, and (iii) as a mathematical tool for analyzing the mechanical condition of the free and bonded material point and by extension of any system of material points (the whole and partial torsor theorem).

KEYWORDS: fundamental law, extended law of classical mechanics, inertial mechanical state, equilibrium theorem, static/dynamic regime.

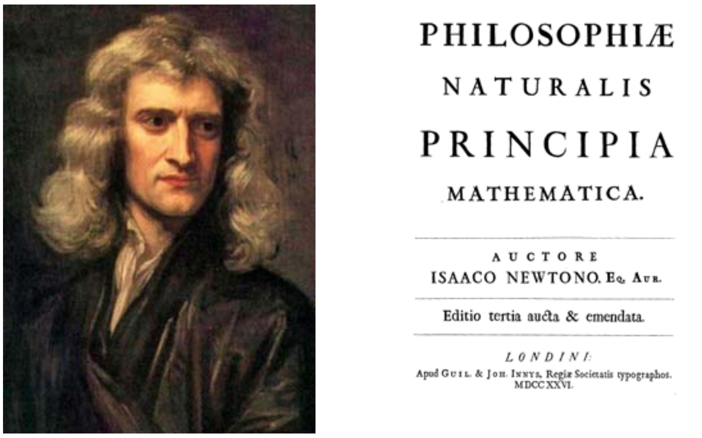
Introducere

Anii 2017 și 2018 ocupă o poziție specială în istoria științei prin faptul că aduc în prim-plan personalitatea marelui Isaac Newton (1643-1727) printr-o pereche aniversară marcată de numere „rotunde": 375 de ani de la naștere (2018) și 330 de ani de la publicarea primei ediții a celebrelor „Principii" (2017). În acest context am considerat oportună prezentarea câtorva aspecte care au constituit obiectul unor preocupări mai vechi ale noastre asupra mecanicii newtoniene.

Concentrarea pe numai unul din cele 3 postulate și abținerea de la considerații de factură filozofică ale doctrinei newtoniene este determinată

[1] **Prof. univ. emerit dr. ing. la** Universitatea Tehnică de Construcții, București.
[2] **Dr. ing.** Institutul Național de Cercetare - Dezvoltare pentru Fizica Pământului; membru al Diviziei de Istoria Tehnicii a CRIFST al Academiei Române.

de doi factori : **(a)** acest mod de abordare este mai aproape de preocupările noastre didactico-științifice, plasate în principal în afara domeniului istoriografiei și **(b)** respectarea limitelor uzuale ale comunicărilor făcute în cadrul DIS. În privința susținerii precizării **(a)**, deși considerăm că Postulatul al II-lea ocupă o poziție oarecum privilegiată în raport cu celelalte două, totuși nu am putut evita unele interferențe cu acestea și cu legea atracției universale pe care le-am dimensionat la strictul necesar. De asemenea ne-am concentrat asupra unor aspecte de fond ale evoluției și perfecționării formelor originale până la expresiile lor actuale, consacrate. În acest sens considerăm că nu este cazul să detaliem aspectele istoriografice referitoare la subiect. Totuși, din respect pentru adevăr vom menționa că însuși Isaac Newton a afirmat că realizarea operei sale nu ar fi fost posibilă fără aportul iluștrilor săi predecesori, începând cu cei din atichitatea greco-romană (Aristotel (384 î.Hr.-322 î.Hr.),


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO, Eq. Aur.

Editio tertia aucta & emendata.

LONDINI:
Apud Guil. & Joh. Innys, Regiæ Societatis typographos.
MDCCXXVI.

Fig. nr. 1 - Isaac Newton și pagina de titlu a capodoperei sale

Arhimede (287 î.Hr.-217 î.Hr) și alții) și încheind cu reprezentanții renaștentiști între care se remarcă Galileo-Galilei (1564-1642). La rândul său opera newtoniană a fost completată și îmbunătățită de însuși autor, în cele trei ediții publicate între anii 1687-1726 și ulterior modernizate de întreagă pleiadă de savanți, dintre care menționăm pe L. Euler (1707-1783), J.L. d´Alembert (1717-1785) și J.L. Lagrange (1736-1813) la care putem adăuga pe reprezentanții teoriilor modern ale fizicii care au revoluționat concepția despre legile universului: M. Plank (1858 - 1947), L.de Broglie (1892 - 1987) și A. Einstein (1879 - 1955).

În fine, menționăm că delimitarea noastră de prezentarea aspectelor filozofice ale doctrinei newtoniene (aspecte la care însuși Is. Newton a ținut întitulându-și opera capitală într-o formă sugestivă în acest sens) mai are și un alt temei în afară de cele două prezentate mai sus. Analiza acestor aspecte filozofice revine unor specialiști în acest domeniu care probabil că vor ține seama că Isaac Newton a avut o atitudine evazivă între materialismul metafizic și idealismul religios. Din fericire acest aspect filozofic nu are efecte negative asupra componentei științifice, de fond a doctrinei clasice. Astfel modelul newtonian s-a devedit satisfăcător în problemele tehnice și chiar în astronomie, unde este aplicat cu succes, rezistând asaltului teoriilor moderne ale fizicii, în calitate de model de calcul și de interpretarea a universului material la scara sistemului solar; așa cum a rezistat și asaltului unor critici în timpul vieții lui Is. Newton, de-a lungul a circa 4 decenii.

Legea fundamentală ca raport cauzal

Legea Fundamentală clasică (LF) exprimă un raport cauzal al cărui suport material este un Sistem Mecanic (SM) constând într-un Solid Rigid (SR) reductibil la un Punct Material Liber (PMLB). Forța $\bar{\boldsymbol{F}}$ care se aplică PMLB constituie cauza care are ca efect accelerarea PMLB reprezentat prin masa sa m, cu accelerația absolută $\bar{\boldsymbol{a}}$ (în raport cu un reper inerțial); (v. schema 1 și relațiile 1 și 2).

CAUZA PRIMARA (EXCITAȚIA) FORȚA DATĂ $\bar{F}$ $(t,\bar{r},\dot{\bar{r}})$	SISTEMUL MECANIC (PM) (OBIECTUL ACȚIUNII FORȚEI) P.M.L.B. de masă "m"	EFECTUL PRIMAR (RĂSPUNSUL P.M.L.B.) ACC. ABSOLUTĂ $\bar{a}$ a PMLB
CAUZA SECUNDARĂ (CONDIȚII INIȚIALE)		EFECT SECUNDAR (MIȘCAREA PM)

Schema 1. Legea fundamentală ca raport cauzal

Variante de exprimare matematică a legii fundamentale

Varianta 1. Expresia matematică elementară a LF (formula fundamentală) este :

$$\bar{F} = m\bar{a},\ \bar{F} = m\ddot{\bar{r}} \tag{1}$$

care poate fi interpretată ca: **(a)** egalitate a doi vectori legați, **(b)** coliniaritate a vectorilor $\bar{\boldsymbol{F}}$ **și** $\bar{\boldsymbol{a}}$**,** unde factorul m este masa PM (punct material) , invariabilă spațio – temporal și **(c)** ecuație diferențială de ordinul al II-lea în raport cu timpul (ecuați diferențială a mișcării P.M.L.B.).

Ca orice formulă fizică, (1) prezintă avantajul conciziei şi al oportunității maxime operaționale, însă şi dezavantajul de a nu explicita raportul cauzal pe care îl reprezintă și care trebuie totuși cunoscut pentru a evita erori atât în aplicarea la diferite situații concrete, cât și în interpretrea LF însăși.

Expresia matematică (1) are următoarea formă dezvoltată:

$$\bar{F}\ (t,\bar{r},\dot{\bar{r}}) = \dot{\bar{H}}, \qquad (2)$$

($\bar{H}$ = m $\bar{v}$ = impulsul absolut al PMLB care face obiectul acțiunii forței date F); forța dată (cauza) care acționează asupra PMLB apare sub forma generală ca funcție vectorială de timp, vector de poziție $\bar{r}$ al PMLB în raport cu originea unui reper inerțial și $\dot{\bar{r}}$ viteza PMLB în raport cu același reper, iar efectul apare ca variație a impulsului absolut al aceluiași P.M.L.B. într-o unitate de timp.

Folosirea vectorului impuls absolut, $\bar{H}$, în expresia (2) a LF are din punct de vedere teoretic două avantaje față de (1) : **a)** evidențiază asocierea obiectivă a efectului forței $\bar{F}$ cu obiectul concret al acțiunii sale, adică PMLB reprezentat prin masa sa m și **b)** constituie expresia teoremei impulsului în calitate de componentă a celor trei teoreme generale ale mecanicii clasice pentru cazul particular al P.M.L.B. Din punct de vedere practic avantajul pare să treacă de partea expresiei (1) deoarece aceasta evidențiază mai bine faptul că la compararea a două SF concurente în vederea clasificării lor aplicând operațiunile elementare de echivalență în conformitate cu raportul cauzal exprimat în legea fundamentală trebuie ca obiectul acțiunii celor două sisteme de forță comparate să fie același PM, sau două PM de aceeași masă „m”, astfel încât să avem ($\bar{F}_1 = \bar{F}_2$) → ($\bar{a}_1 = \bar{a}_2$). Ca raport cauzal ecuația fundamentală este valabilă în regim permanent, adică pentru orice $t \geq t_0$, unde t_0 este originea timpului aleasă în mod arbitrar.

Privită ca ecuație vectorială sau condiție de coliniaritate expresia (1) a LF conține cauza primară $\bar{F}$ separată de efectul său primar, $\bar{a}$. Acest fapt este specific formei celei mai simple a legii fundamentale în care forța dată $\bar{F}$ este invariant spațio-temporal (v. problema balistică, m$\bar{g}$ = m$\bar{a}$). În acest caz ecuația diferențială a unui P.M.L.B. se integrează „în trepte" conform problemei inverse a cinematicii PM păstrând oarecum separarea cauzei de efectul său. În general însă acest tablou nu rezistă; astfel chiar într-un caz simplu cum este pendulul elastic mărimile cauză și efect „se amestecă" rezultând ecuația diferențială a mișcării P.M.L.B. în conformitate cu problema lui Cauchy. Ceea ce este comun însă tuturor situațiilor este angajarea condițiilor inițiale care apar în calitate de cauză secundară, independentă de forța dată, extinzând raportul cauzal primar care relaționează cauza primară cu efectul primar (accelerația absolută) la forma care relaționează cauzele primară/secuandară (forța dată și condițiile inițiale) cu efectul lor global constând în mișcarea absolută a P.M.L.B. exprimată prin tripleta $\bar{r}$, $\dot{\bar{r}}$, $\ddot{\bar{r}}$. Referitor la aspectul esențial al condițiilor inițiale trebuie făcute următoarele precizări: **a.** condițiile inițiale se justifică în calitate de cauză secundară (v. Tab. 1) prin faptul că ele reprezintă o infuzie / difuzie de energie de tip ciocnire (fenomen de salt); condițiile inițiale pot fi privite și ca elemente de continuitate prin alegerea potrivită a momentului inițial, „t_o" și **b.** deși condițiile inițiale rămân cauză secundară, independent de **SFD,** ele nu mai pot fi absolut arbitrare în cazul PMLG, deoarece trebuie să respecte condițiile de compatibilitate cu legăturile aplicate PM în calitate de pivot al raportului cauzal.

Privită din punct de vedere dimensional relația (1) exprimă forța ca mărime derivată în funcție de dimensiunile masei , lungimii și timpului (ca mărimi fundamentale) prezente și în cealaltă mărime derivată, accelerația :

$$<F>=<M><L><T>^{-2} \quad (3)$$

În acest context, menționăm că : măsurarea unei forțe este posibilă atât prin măsurarea directă a efectului $\bar{a}$, cât și prin intermediul deformației elastice a unui resort ideal, adică prin echivalarea forței date cu o forță elastică în regim static. Trebuie însă subliniat că interpretarea dimensională a LF poate antrena o eroare majoră : definirea noțiunii de forță folosind relația **(3).**

Varianta 2. Corolarul postulatului al doilea al mecanicii clasice. Prima extindere a LF pentru PMLB

În virtutea acestui corolar „Dacă un **PMLB** este acționat de un Sistem de Forțe Concurente (SFC), atunci efectele lor, adică accelerațiile absolute $\bar{a}_i$ se compun odată cu sistemul de forțe deoarece accelerațiile $\bar{a}_i$

produse de fiecare dintre forțele $\bar{F}_i$ aplicate succesiv sunt aceleași cu cele produse când forțele $\bar{F}_i$ acționează simultan (în sistem)" :

$$\Sigma \bar{F}_i = \Sigma\, m\, \bar{a}_i \rightarrow \Sigma \bar{F}_i = m\, \Sigma\, \bar{a}_i \rightarrow \bar{R}_d = m\, \bar{a} \qquad (4)$$

unde $\bar{F}_i$ și $\bar{a}_i$ se compun în conformitate cu regula paralelogramului; $\bar{R}_d$ și $\bar{a}$ reprezintă rezultanta Sistemului de Forțe Concurente Date (SFD) și respectiv rezultanta accelerațiilor $\bar{a}_i$, adică accelerația absolută a PM.

Ultima egalitate (4) poate fi exprimată sub forma „dezvoltată"

$$\bar{R}_d\,(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \dot{\bar{H}} \qquad (5)$$

care constituie prima extindere a legii fundamentale (2), reprezentând ecuația diferențială a mișcării PMLB .

Din punct de vedere pur matematic sumele care apar în (4) decurg din (1) fără nici o restricție. Însă din punct de vedere fizic compunerea forțelor date concurente, $\bar{F}_i$ necesită două precizări : (a) regula de sumare (compunere) a vectorilor legați, concurenți și (b) criteriul conform căruia raportul cauzal exprimat în relația (4), atât vectorii $\bar{F}_i$ cât și $\bar{a}_i$ sunt chiar cei din (1). Or, corolarul principiului al doilea tranșează tocmai aceste două aspecte precizând pentru (a) regula paralelogramului, iar pentru (b) principiul independenței acțiunii forțelor.

Varianta 3. Legea fundamentală în cazul Punctului Material cu Legături (PMLG). Cea de a doua extindere a legii fundamentale

Dacă obiectul acțiunii SFD este un PMLG se pune problema modului de manifestare a legăturilor (pe care le vom considera independente, olonome, scleronome și în general lucii și bilaterale) în expresia matematică a legii fundamentale. În acest sens este necesar să considerăm aspectele geometric și mecanic ale legăturilor; mai exact, fiecare legătură simplă pe care o vom considera olonomă și scleronomă (exprimată matematic prin ecuația unei suprafețe rigide și fixe) se manifestă din punct de vedere mecanic printr-o forță de legătură $\bar{N}_j$ denumită reacțiune normală, exprimabilă cu ajutorul noțiunii de gradient:

$$\bar{N}_j = \lambda_j\, f_j(\bar{r}) \qquad (6)$$

unde λ_j este un multiplicator funcție de SFD, caracteristic fiecărei legături simple $f_j(\bar{r})$ =0.

Pe baza relației (6) fiecare suprafață – legătură olonomă $f_j(\bar{r})=0$ intervine în expresia LF prin reacțiunea sa $\bar{N}_j$ care figurează alături de rezultanta $\bar{R}_d$ a SFD ”cu drepturi egale” conducând la cea de-a doua formă extinsă a legii fundamentale (7) care reprezintă ecuația diferențială a stării mecanice a PMLG :

$$\bar{R}_d\,(t,\bar{r},\dot{\bar{r}}) + \bar{R}_l\,(r) = \dot{\bar{H}} \quad ; \quad (\bar{R}_d = \Sigma\,\bar{F}_i \;;\; \bar{R}_l = \Sigma\bar{N}_j \;;\; \bar{H} = m\bar{v}) \quad (7)$$

Apariția rezultantei $\bar{R}_l$ a reacțiunilor alături de cea a forțelor date $\bar{R}_d$ în expresia LF (7) are la bază corolarul postulatului al doilea, separat pentru SFD și SFLG (Sistem de Forțe de Legătură), precum și axioma eliberării (axioma legăturilor).

În legătură cu mențiunea conform căreia $\bar{R}_d$, $\bar{R}_l$ apar în (7) „cu drepturi egale” trebuie precizat că aceasta se referă numai la legitimitatea aplicării operației de compunere a celor două rezultante lăsând însă loc la două deosebiri marcante între ele: **(i)** prezența vectorului $\bar{R}_l$ în același membru al ecuației fundamentale cu $\bar{R}_d$ poate induce impresia greșită că ambele SF aparțin cauzei; în realitate $\bar{R}_l$ aparține efectului și **(ii)** $\bar{F}_i$ apar ca forțe date externe a căror compunere nu ridică probleme pentru orice număr finit de forțe date, în timp ce compunerea reacțiunilor, deși posibilă în principiu, practic ea nu se efectuează lăsând reacțiunile $\bar{N}_j$ să figureze ca atare în **(7)**, deoarece ele sunt necunoscute. Simplificând expunerea vom admite în cele ce urmează că $\bar{N}_j$ sunt liniar independenți, astfel încât gradul de mobilitate NGL (Număr de Grade de Libertate) al PM are valoarea maximă 3.

În fine, trebuie menționat că forma (7) a LF este prezentă în mecanica teoretică sub titulatura de **teorema impulsului** care, împreună cu teorema momentului cinetic și teorema energiei constituie grupul teoremelor generale ale mecanicii vectoriale.

Noțiunea de echivalență a SFC în conformitate cu LF ca raport cauzal. Clasificarea SFC

În mod esențial noțiunea de SFC echivalente se bazează pe LF (4) ca raport cauzal: „Două SF (sisteme de forțe) concurente sunt echivalente numai dacă produc același efect (primar) asupra aceluiași PLMB, adică, îi imprimă acestuia aceeași accelerație „absolută" ; din această definiție esențială se deduc următoarele definiții operaționale ale condiției de echivalență a două SFC subordonate formalismului matematic : „Orice SF concurente este echivalent cu rezultanta sa," sau „Două SFC sunt echivalente numai dacă au aceeași rezultantă în regim permanent". Aceaste definiții operaționale nu conțin în mod explicit încadrarea în raportul cauzal exprimat în LF reținând numai corolarul LF, respectiv regula paralelogramului; astfel definiția condiției de echivalență a SF concurente, care este suficientă și eficientă din punct de vedere operațional, poate ascunde esența (raportul cauzal) constituind o primă separare formală a cauzei de obiectul acțiunii sale și, implicit de de efectul său. În acest context este oportun să invocăm grupul operațiunilor elementare de echivalență a SFC care conține operația de compunere în conformitate cu regula paralelogramului ca „pivot" și operațiile care, fiind aplicate unui SFD nu au nici un efect asupra rezultantei acestuia (descompunerea unei forțe date în componente concurente pe suportul său și includerea / excluderea unui subsistem de forțe echivalent cu zero dintr-un SFD concurente = compunere condiționată). Din punct de vedere practic compunerea SF concurente se face cu scopul de a reduce SF respective la forma lor cea mai simplă și a le clasifica astfel, conforma legii fundamentale (4).

Se observă că grupul menționat îmbracă reguli ale formalismului matematic care permit o operare logică cu ele lăsând oarecum în umbră esența fizică a noțiunii de echivalență a SF concurente pe care o exprimă (acest aspect se accentuează în cazul SF oarecare.)

În conformitate cu cele de mai sus SF concurente se clasifică în:

a) echivalente cu zero , $\bar{R}_d = 0$ sau $\bar{R}_d + \bar{R}_l = 0$ și **b)** echivalente cu rezultanta $\bar{R}_d \neq 0$ în cazul PMLB, și $\bar{R}_d + \bar{R}_l \neq 0$ în cazul PMLG (în regim permanent).

Anticipând vom încheia acest paragraf cu mențiunea că în afara primei decuplări a SF concurente (cauza) de efectul său (mișcarea punctului material căruia i se aplică) practicate în cadrul prezentării legii fundamentale în calitate de criteriu de echivalență a SF concurente și de clasificarea a SF concurente, vom menționa că din punct de vedere matematic se produce și o a doua decuplare a cauzei de efectul său în statică, unde provine de la bifurcarea ecuației diferențiale care exprimă LF conducând la formularea celor două obiective ale staticii. În contextul de față separarea constă în oprirea demersului la compunera SF concurente privite în sine, adică la înlocuirea SFD cel mai simplu SF echivalent, rezultanta sa. În același context apare oportună următoarea precizare : această primă decuplare s-a produs „ în fază unică” vizând ecuația fundamentală ca atare, în regim dinamic nerestrictiv, dar lăsând în umbră membrul m$\bar{a}$, ca fiind subînțeles ; cea ce a avut ca urmare (după extinderea formulei fundametale de la SF concurente ca vectori legați aplicat unui PM la SF oarecare ca vectori glisanți aplicați unui SR) clasificarea SF în cele patru cazuri de reducere cunoscute. Elementul comun al ambelor decuplări il constituie operarea numai cu SF reducând PM asupra căruia acționează acel SF la dimensiunea sa geometrică. Însă există și deosebiri între cele două decuplări; astfel în prima decuplare se au în vedere sisteme de forțe date (SFD) nerestrictive, în spiritul dinamic al LF, pe când cea de a doua decuplare vizează LF în forma sa particulară, bifurcată, care corespunde regimului quasi static/static, pentru SFD și SFLG restrictive (echivalente cu zero în regim permanent).

Tratarea LF ca bază pentru definirea noțiunii de echivalență a sistemelor de forțe și pentru clasificare acestora s-a făcut în cursurile de mecanică teoretică predate în universitățile tehnice, în partea introductivă a secțiunii de statică; ceea ce a indus tentația de a considera în mod spontan că SF cu care se opera erau independente de factorul timp, sau chiar independente spațiu-temporal. Asfel afirmația potrivit căreia tabloul sinoptic al cazurilor de reducere a SF depășește cadrul staticii, deși corectă în principiu (deoarece cazul SF echivalente cu zero este numai unul , cel mai simplu din cele patru) este făcută de pe poziția primului obiectiv al staticii, prin eludarea efectului factorului timp.

Efectul considerării factorului timp în cadrul efectuării operațiilor elementare de echivalență În general SF concurente care acționează asupra unui PM are forma (2); în cazuri particulare SFD variază numai spațial (forțele elastice), sau rămâne chiar invariabil, spațio – temporal (forțele gravitaționale în imediata vecinătate a scoarței terestre). Pe de altă parte efectuarea operațiilor elementare de echivalență nu depinde în mod explicit, nici de timp și nici de poziția punctului de concurență a SF; cu alte cuvinte SF concurente se înregistrează la un moment dat pe o schemă de forțe, în poziția (configurația) corespunzătoare acelei secvențe (poziția curentă și configutația corespunzătoare a SF concurente dat). Această suveranitate a operației de compunere a SF concurente ca operațiune elementară de echivalență atestă faptul că rezultanta SF concurente reprezintă cel mai simplu sistem echivalent cu cel inițial dat, în virtutea LF;

însă, rezultanta ca atare va fi în general funcție atât de timp, cât și de configurația curentă a SF concurente cu care s-a operat, inclusiv poziția punctului lor de concurență (PM). De aici se deduce că apartenența unui SFD concurente la una din cele două categorii posibile (R = 0, R # 0) este în general variabilă în timp. Trecînd de la SF concurente (vectori legați aplicați unui punct material) la SF oarecare aplicate SR ca vectori glisanți observăm că în timp ce clasificarea SF în cele 4 cazuri de reducere este absolută , independentă de structura analitică a forțelor, încadrarea unui SFD este relativă fiind funcție de structura analitică a forțelor și putînd astfel determina o migrare în timp a unui SF de la un caz de reducere la altul. Totuși schimbarea încadrării unui SF în decursul timpului poate fi limitată. Astfel un, SF concurente, paralele sau coplanare rămîn particulare, chiar dacă punctul de aplicație este mobil sau suportul forțelor respective aplicate unui SR rămân paralele sau coplanare cu direcții variabile temporal sau cu plane variabile temporal. Practic în aplicațiile de reducere a SF punctul de aplicație al SF concurente, planul forțelor sau direcția comună se consideră fixe. Ceea ce apropie SFD supuse relațiilor de reducere, de regimul static (primul obiectiv al staticii). În acest context se face următoarea precizare: în cadrul celui de al doilea obiectiv al staticii, primul obiectiv, apare ca o primă fază, care însă diferă de formularea sa consacrată în cadrul studiului condițiilor de echivalență a SF din cel puțin două puncte de vedere: **(1)** În cadrul obiectivului al doilea al staticii operațiile de echivalență a SF pot conține atât SFD cât și SFLG și (**2)** Operațiunile elementare de echivalență sunt restricționate în regim static prin condiția de a fi cele corespunzătoare SF echivalente cu zero. În regim dinamic (LF neparticularizată, nebifurcată) calculul torsorului de forțe nu urmărește, încadrarea sistemelor de forțe, motiv pentru care prezența a două obiective în regim dinamic este inoportună.

Legea fundamentală ca instrument de analiză a stării mecanice a PM

În expunerea precedentă legea fundamentală a fost interpretată ca raport cauzal, ca bază obiectivă de definire a condițiilor de echivalență a SF concurente și criteriu de clasificare a acestora (prin separarea convențională a cauzei de obiectul acțiunii sale). În cele ce urmează accentul se va pune pe legea fundamentală ca instrument de calcul extinzând efectul primar (accelerația absolută) la starea mecanică a PM care constă în mișcarea absolută $\bar{r}$ $\dot{\bar{r}}$, $\ddot{\bar{r}}$ a acestuia și reacțiunile dinamice $\bar{N}_j$, care îi revin conform (7).

În acest context se observă că: (**1)** Folosirea ecuației fundamentale ca bază pentru definirea condițiilor de echivalență a SF concurente și criteriu de clasificare a SF presupune deopotrivă un efort de calcul ca și ipostaza de față a aceleiași legi fundamentale și (**2**) Formula fundamentală constituie ecuația diferențială a mișcării absolute a PMLB și respectiv ecuația diferențială a stării mecanice a PMLG.

Din acest punct de vedere sistematizarea aplicării legii fundamentale se poate realiza în două variante adoptând unul din următoarele criterii care au ca element comun gradul de mobilitate NGL al PM: **(a)** primul criteriu decurge în mod direct din legea fundamentală ca raport cauzal, în timp ce al doilea criteriu (**b)** este legat direct de aspectul aplicativ punînd accentul pe ce mărimi sunt date prin enunț și ce mărimi se cer. Indiferent de modul de grupare a lor , mărimile cu care se operează în ambele variante sunt următoarele (extinderea maximă a schemei 1) :

Mărimi din categoria „cauză" conținute în mod implicit sau explicit în expresia LF ca raport cauzal :

- Forțele date $\bar{\boldsymbol{F}}_i$ componente ale SFD , respectiv ale cauzei primare , reprezentate în formula fundamentală prin rezultanta lor $\bar{\boldsymbol{R}}_d$; sunt vectori legați, concurenți, în număr arbitrar , finit;

- Poziția inițială ($\bar{\boldsymbol{r}}_0$) și viteza inițială ($\bar{\boldsymbol{v}}_0$) în calitate de componente ale cauzei secundare; în această calitate condițiile inițiale sunt privite ca fenomene de salt (de tip ciocnire) constînd în infuzie / difuzie bruscă de energie cinetică (dinspre mediul exterior spre PM sau invers, dinspre PM spre mediul ambiant). În cadrul problemei lui Cauchy condițiile inițiale nu apar ca fenomene de salt, însă rolul lor în conformarea efectului global (mișcarea PM) rămâne.

Mărimi din categoria „pivot al raportului cauzal" conținute în mod implicit sau explicit în legea fundamentală (suport material al acțiunii SFD).

- Masa „m" a punctului material care face obiectul acțiunii SF concurente presupusă invariabilă spațio – temporal.

- Sistemul de legături simple aplicate PM presupuse olonome, scleronome și în general independente, bilaterale și lucii. Ele sunt date ca expresii matematice ale unor suprafețe – legături rigide și fixe de forme $f_j(\bar{\boldsymbol{r}}) = 0$, și nu intervin direct în expresia formulei fundamentale, unde sunt însă reprezentate de reacțiunile lor.

Mărimi din categoria „efect” conţinute în mod implicit sau explicit în expresia formulei fundamentale

- Acceleraţia absolută, a PM în calitate de efect primar, direct;
- Mişcarea absolută a PM în calitate de efect secundar, global ($\bar{r}$ $\dot{r}$, $\ddot{r}$)
- Sistemul de reacţiuni $\bar{N}_j$ care corespund aspectului mecanic al suprafeţelor – legături; aceste reacţiuni se exprimă matematic cu ajutorul vectorului gradient, $\bar{N}_j = \lambda_j \nabla_j (\bar{r})$ şi aparţin efectului secundar alături de mişcarea absolută a PM formînd laolaltă strea mecanică a PMLB / LG. Din punct de vedere operaţional, matematic aplicarea LF revine la integrarea unei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul al doilea în raport cu argumentul timp (problema lui Cauchy). În strictă conformitate cu expresia matematică a LF, mărimile care aparţin cauzei se consideră în general date (SFD şi condiţiile iniţiale) împreună cu cele care reprezintă suportul material al SFD (masa PM şi sistemul de legături simple care se aplică), iar mărimile care aparţin efectului se consideră necunoscute (mişcarea absolută a PM şi reacţiunile formînd împreună starea mecanică a PM). Această observaţie sugerează pentru problema formulată mai sus denumirea de problema directă a PMLG (NGL = 1; 2). În cazul PMLB (NGL = 3) acest tip de problemă capătă forma cea mai simplă, denumită problema directă a PMLB, în care starea mecanică a PM se reduce la mişcarea sa absolută. Reflexivitatea formulei fundamentale în cazul problemei directe a PMLB sugerează inversarea rolului mărimilor date / necunoscute (nu şi inversarea raportului cauzal) rezultînd problema inversă a PMLB. Desigur că având în vedere reflexivitatea ecuaţiei fundamentale rolurile mărimilor date/necunoscute se pot inversa fără a afecta astfel sensul unic al raportului cauzal exprimat în legea fundamentală. Rezultă astfel mai multe variante de formulare a problemelor care urmează a fi abordate cu ajutorul legii fundamentale. Însă sunt consacrate trei tipuri de problemă pe care le vom descrie în continuare. Pentru aceasta vom recurge la exprimarea legii fundamentale în coordonate naturale ţinând cont de gradul de mobilitate NGL şi de specificul SFD (absent ($R_d \equiv 0$), autoechilibrat ($R_d = 0$) în regim permanent şi oarecare (R_d # 0)), precum şi de condiţiile iniţiale.

Problema directă (PMLB, NGL = 3, $\bar{R}_l$ absent ($\bar{R}_l \equiv 0$)) este cea în care calculul decurge în acelaşi sens cu raportul cauzal exprimat în legea fundamentală, dinspre cauza presupusă cunoscută (SFD şi condiţii iniţiale arbitrare) spre efectul global complet (mișcarea absolută a PMLB care este necunoscută).

Exprimând formula fundamentală în coordonate intrinseci avem pentru PMLB

$$R^{\tau}_{d} + R^{\tau}_{l} = m\,\dot{v}\,; \quad R^{\nu}_{d} + R^{\nu}_{l} = mv^2/\rho\,; \quad R^{\beta}_{d} + R^{\beta}_{l} \equiv 0 \qquad (8)$$

Pentru (8) există următoarele două cazuri particulare :

Cazul a) în care $R_d \equiv 0$ (SFD absent) constituie primul caz extrem care în realitate intră sub incidența postulatului inerției, evidențiind cele două variante ale stării mecanice inerțiale, și anume repaus absolut, (regim static, pentru $v_o = 0$) și mișcarea rectilinie și uniformă pentru v_0 # 0 , regim quasistatic), cu șanse egale de instaurare (condiții inițiale absolut arbitrare).

Cazul b) în care SFD este autoechilibrat în regim permanent, $R_d = 0$, corespunde formei particulare a legii fundamentale (teorema conservării impulsului).

În pofida aparențelor cazul **(a)** diferă esențial de **(b)** datorită faptului că în cazul (a) mulțimea PES (Poziții de Echilibru Static) ocupă întregul spațiu E_3 iar regimul static / quasi static este garantat în regim permanent, în timp ce mulțimea PES în cazul (b) constă de regulă în unul sau câteva elemente; astfel condițiile inițiale de tip static ($v_0 = 0$) nu asigură în mod necesar evoluția stării mecanice în regim static , iar pentru v_o # 0 alternativa MRU (Mișcare Rectilinie Uniformă) nu este garantată. În cazul PMLB rezultanta $\bar{R}_d$ se descompune spontan în două componente: $\bar{R}^{\tau}_{d}$ care are efect de accelerare a mișcării PMLB prin variația modulului vitezei și $\bar{R}^{\nu}_{d}$ care are efect de curbare a traiectoriei (calculul efectiv cel mai simplu s-ar putea să se realizeze uneori folosind alte sisteme de coordonate, așa cum este de exemplu problema balistică, mișcarea PMLB în câmpul forțelor centrale și altele).

Gradul de mobilitate a PMLB este NGL = 3. În realitate însă PMLB evoluează cu un grad de mobilitate EFectiv NGL.EF = 2,1 care este funcție de specificul SFD și de jocul dintre SFD și condițiile inițiale (de exemplu problema balistică, căderea liberă și mișcarea PMLB într-un câmp de forțe centrale).

*Sistem de coordonate generalizate***.**

Poziția curentă a PMLB exprimată în funcție de timp (mișcarea PMLB în raport cu un reper fix , dat) depinde în E_3 de trei parametri independenți care se aleg sub forma diferitelor sisteme de coordonate (cartezian, oblic, cilindric, sferic) cărora li se asociază baze de vectori. Dacă numărul acestor coordonate este egal cu 3, atunci punctul matrial liber care prin definiție poate ocupa orice poziție , ocupă realmente o poziție curentă funcție de SFD și condițiile inițiale, astfel încât NGL.EF ≤ NGL. Ecuația vectoriale a mișcării PMLB , $\bar{r} = \bar{r}(t)$ se proiectează pe axele reperului triortogonal cartezian rezultând sistemul de ecuații scalare : $x = x(t)$, $y = y(t)$ și $z = z(t)$. Prin eliminarea parametrului t rezultă două ecuații reprezentând o curbă ca intersecție a două suprafețe quasi static fixe și rigide pentru fiecare SFD și condiții inițiale. În cazul NGL.EF = NGL=3 există 3 parametri independenți , $q_i(t)$, denumiți coordonate generalizate, astfel încât avem $\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3)$; problema revine la a exprima traiectoria liberă a PM în două sisteme de coordonate. În cazul NGL.EF =2 vom avea $\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2)$, iar eliminarea celor doi parametri conduce la ecuația unei sprafețe pe care curba traiectoria PM va fi quasi static „desenată" având o alură funcție de jocul SFD / condiții inițiale în fiecare caz. Dacă PM are NGL.EF = 1, atunci parametrul t poate fi înlocuit cu o unică coordonată generalizată q(t) iar rezultatul adică forma traiectoriei este aceeași în mod independent de structura analitică a funcției q(t) urmând ca acesta să intervină în expresia legii orare.

Deosebirea dintre traiectoria liberă a unui PM cu NGL.EF = 1,2,3, constă în „disponibilitatea" schimbării sale sau / și a legii orare la schimbarea condițiilor inițiale (vezi de exemplu problema balistică și căderea liberă).

În realitate pentru fiecare SFD și condiții inițiale traiectoria liberă a PM este o curbă bine definită; ceea ce se poate interpreta ca o mișcare cu NGL.EF = 1 sau chiar ca o legătură dublă fictivă a cărei reacțiune nu există ($R_l \equiv 0$). În același context PM aflat în repaus poate fi interpretat ca având o legătură triplă, fictivă. Un exemplu interesant în acest context : NGL.EF = 1 pentru mișcarea de rostogolire pură rezultă aplicând discului o primă legătură simplă fictivă care, conform jocului SFD / condiții inițiale determină o mișcare plană, și o a doua legătură simplă exprimată matematic prin ecuația $x = R\ \Theta$ care definește rostogolirea pură; evident că amble legături fictive nu au reacțiuni. Urmărind această idee putem accepta că în cazul stării de repaus orice PMLB are NGL.EF = 0, în prezența a trei legături simple fictive. Operând cu noțiunea de legături reale/fictive și NGL/NGEF deducem că PMLB, care are în mod obiectiv NGL = 3 poate evolua în realitate cu NGL.EF=2,1,0 și în funcție de jocul SFD/c.i. în fiecare aplicație.

Problema inversă a PMLB urmărește raportul cauzal exprimat în LF , în sens opus celui descris pentru problema directă, fiind dată mișcarea PMLB și necunoscută rezultanta $\bar{R}_d$ a SFD. Mișcarea absolută a PMLB este redată în acest caz sub una din cele două forme cunoscute din cinematică, presupunându-se date: (i) ecuația mișcării, $\bar{r} = \bar{r}(t)$ sau (ii) ecuația traiectoriei și legea orară. Necunoscuta este în acest caz $\bar{R}_d$ care rezultă sub formă unic determinată lăsând însă nedertminate forțele date , $\bar{F}_i$ (excepție cazul i= 1.)

Problema inversă a PMLG cu NGL = 1,2 este neuzuală. Prezintă însă interes varianta extremă a problemei inverse a PMLG în care PM este fixat într-o poziție dată prin trei legături simple independente ; în această variantă $\bar{F}_i$ sunt date , iar reacțiunile necunoscute $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ și $\bar{N}_3$ rezultă determinate în mod unic. Această a doua variantă extremă se poate încadra în ambele regimuri, static și dinamic , alături de cea a PM izolat; în ambele cazuri extreme SF concurente este echivalent cu zero, ceea ce corespunde regimului static, de la care PM izolat se abate prin prezența mișcării rectilinii și uniforme, pentru $v_o \neq 0$, în timp ce PMLG fixat prin legături se abate prin prezența unor reacțiuni care pot depinde de timp.

Problema mixtă. Se referă la PMLG cu NGL = 1 sau 2 și își datorează denumirea grupării mixte a mărimilor date / necunoscute cu care operează. Mai exact, în problema mixtă se dau SFD concurente, sitemul de legături simple aplicate PM și condițiile inițiale, și se cer mișcarea PM și reacțiunile corespunzătoare legăturilor care se consideră olonome , scleronome, independente, lucii și bilaterale. Problema mixtă a PMLG are două variante în funcție de valoarea NGL (1 sau 2). Necunoscutele sunt atât mișcarea PMLG, cât și reacțiunile dinamice.

NGL = NMAXGL – NLEGS(IND) = 3 – (1,2) = (2,1)

Varianta a) În cazul unei singure legături (NGL = 2) relațiile (8) devin :

$$R^{\tau}_d + N^{\tau} = m\dot{v} ; \quad R^{\nu}_d + N^{\nu} = mv^2/\rho \; ; \quad R^{\beta}_d + N^{\beta} = 0 \qquad (9)$$

iar traiectoria PMLG este ”desenată” pe unica suprafață legătură rigidă și fixă

Cazuri particulare ale variantei (**a**) sunt cele în care SFD lipsește ($R_d \equiv 0$), iar este autoechilibrat ($R_d = 0$).

Varianta b) în cazul prezenței a două legături simple și independente (NGL = 1) legătura dublă devine traiectoria PMLG rigidă și fixă, iar ecuațiile (8) devin :

$$R^{\tau}_{d} + R^{\tau}_{l} = m\,\dot{v}\,; \quad R^{\nu}_{d} + R^{\nu}_{l} = mv^{2}/\rho\,; \quad R^{\beta}_{d} + R^{\beta}_{l} = 0 \qquad (10)$$

unde $\bar{R}_l$ se exprimă în funcție de versorii $\bar{n}_1$ și $\bar{n}_2$ ai normalelor celor două suprafețe legături.

Forma particulară a legii fundamentale în regim static

Regimul static se caracterizează prin persistența stării de repaus a PM în regim permanent (adică pentru orice $t \geq t_o$):

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \quad \rightarrow \quad (\bar{R}_d + \bar{R}_l = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\bar{r}} = v_0 = 0) \qquad (11)$$

ceea ce se plasează în cadrul primei variante a stării mecanice inerțiale. Regimul quasi static se definește prin persistența stării de MRU corespunzătoare condițiilor inițiale ceea ce îl plasează în cadrul celei de a doua variante a stării mecanice inerțiale. În ambele situații, astfel formula fundamentală se bifurcă, decuplându-se în: **(a)** o condiție de echilibru în regim permanent a unui SF concurente, exprimată printr-o ecuație vectorială algebrică specifică fiecărui caz concret și **b)** o ecuație diferențială de ordinul al doilea în raport cu timpul, aceeși în toate cazurile, care descrie pentru $v_0 \neq 0$ o mișcare rectilinie și uniformă a PM sau starea de repaus absolut pentru $v_0 = 0$. Astfel bifurcarea nuanțează rolul condițiilor inițiale acela de cauză secundară în regim static/quasistatic; pentru PMLB condițiile inițiale sunt în principiu absolut arbitrare, pe când pentru PMLG condițiile inițiale trebuie să fie compatibile cu legăturile.

În acest context facem precizările care urmează :

- Primele două ecuații (11) se implică reciproc în regim permanent, deoarece formează un sistem

$$\bar{R}_d + \bar{R}_l = 0 \quad \leftrightarrow \ddot{\bar{r}} = 0 \qquad (12)$$

pentru care decuplarea se referă numai la faptul că ele se rezolvă în mod independent.

- În regim static ($v_0 = 0$, ca și în regim qusistatic (v_0 # 0) condiția de echilibru din sistemul (12) pierde caracterul de ecuație diferențială; ea se compatibilizează în regim permanent cu perechea sa decuplată care rămâne ecuație diferențială. Pe de altă parte logica instaurării stării de echilibru în regim permanent implică în general absența argumentului timp din expresiile $\bar{R}_d$ și $\bar{R}_l$ (cu excepția PM fixat prin legături, precum și a unor SFD cum ar fi cele armonice în fază, etc.)

- Prima egalitate (12) trebuie garantată în regim permanent dearece în caz contrar ecuația $\ddot{r} = 0$ nu se mai integrează sub forma $\dot{r}$ = ct., ci reprezintă numai o condiție de extrem.

- Implicația în ambele sensuri din (12) rezistă numai dacă una din cele două egalități este garantată fenomenologic în regim permanent. Mai exact, privind lucrurile dinspre cauză spre efect, adică dinspre SF spre starea mecanică a PM asupra căruia acționează acel SF, se face ipoteza că SF concurente este echivalent cu zero în regim permanent și se trage concluzia că în acest caz PM evoluează în regim static dacă $v_0 = 0$. (Dacă SF concurente care acționează asupa PM este echivalent cu zero în regim permanent atunci starea mecanică a PM este inerțială, respectiv repaos absolut dacă $v_0 = 0$, și MRU dacă v_0 # 0 .

- Putem însă privi lucrurile și în sens opus, adică dinspre efect spre cauză, admițând prin ipoteză îndeplinirea celei de a doua condiții (12) (desigur în regim permanent pentru $v_o = 0$) și trăgând concluzia că SF concurente este echivalent cu zero, fără ca prin aceasta să se lezeze sensul unic al raportului cauzal. (Daca starea mecanică a unui PM este una inerțială, atunci SF concurente care acționează asupra acelui PM este echivalent cu zero în regim permanent). Cu alte cuvinte, în ambele variante (se operează asupra unuia dintre membrii ecuației fundamentale în ipoteza că acel membru este nul, trăgându-se concluzia potrivită asupra celuilalt membru; însă nu există în general garanția că unul dintre cei doi membri ai ecuației este nul în regim permanent; ceea ce face necesară analiza fiecărui caz concret; cu excepția PM izolat, unde condiția de echivalență a SF în regim permanent este garantată fenomenologic și a PM fixat prin legături, unde garanția fenomenologică se referă la starea de repaus a punctului material. Pe de altă parte, compatibilitatea SF concurente cu echilibrul (adică garanția persistenței condiției de echilibru în regim permanent) poate fi identificată prin calcul și are loc dacă ecuațiile de echilibru au rădăcini reale (care reprezintă mulțimea PES caracteristică SF concurente analizate.)

Legăturile PM se consideră olonome, scleronome și în general, independente, bilaterale și lucii, atât în regim static cât și dinamic; în regim static au sens numai legăturile scleronome , pe când în regim dinamic această restricție constituie numai o circumstanță simplificatoare. În ambele cazuri o legătură simplă blochează deplasarea PM pe direcția ei (aspect static) reducând astfel NGL cu o unitate și introduce în expresia formulei fundamentale reacțiunea $\bar{N}$ necunoscută, căreia i se atribuie blocarea menționată (aspectul mecanic). În regim dinamic modulul reacțiunii normale este corectat prin efectul curburii traiectoriei, așa cum rezultă din expresia formulei fundamentale în coordonate naturale; excepția de la această regulă o constituie cazul în care legătura este plană sau o suprafață riglată. În regim static, la care ne referim aici, condiția de echilibru a SF concurente este:

$$\bar{R}_d(\bar{r}) + \bar{R}_l(\bar{r}) = 0, \bar{R}_d + \bar{R}_l = 0 \qquad (13)$$

În (13) se înscriu forțele elastice în regim static (repaus), unde $\bar{r}$ rezultă ca rădăcină a ecuației respective; în ceea de a doua ecuație (13) ambii vectori sunt invarianți spațio-temporal, deci condiția de echilibru are una dintre următoarele două șanse: **a)** rădăcinile ecuației algebrice scalare de echilibru sunt reale și valabile în regim permanent și **b)** sistemul de ecuații algebrice scalare nu are rădăcini reale. În cazul PM fixat prin legături ecuația fundamentală are forma:

$\bar{R}_d(t, \bar{r}_0) + \bar{R}_l(t, \bar{r}_0) = 0$, unde $\bar{R}_l$ se compatibilizează la echilibru cu orice SFD. (14)

Cele trei tipuri de problemă ale staticii PM

Acestea derivă din cele formulate în regim dinamic, prin particularizarea lor la regimul static. În toate aceste tipuri de problemă locul central îl ocupă condiția de echilibru al SF concurente care acționează asupra PLMB / LG; sistemul de ecuații scalare respectiv apărut în urma bifurcării formulei fundamentale confirmă sau infirmă compatibilitatea SF concurente cu echilibrul în regim permanent prin mulțimea Pozițiilor de Echilibru Static (PES) (nevidă/vidă). Compatibilitatea SF concurente cu echilibrul nu garanteză instaurarea regimului static, ci numai o semnalează ca posibilitate. Alături de condiția de echilibru intervin condițiile inițiale statice ($v_0 = 0$ și P_0 aparține mulțimii PES).

- **Problema directă a staticii PM** se referă la starea de repaus a PMLB (NGL = 3) în regim permanent, în absența legăturilor ($R_l \equiv 0$) și în prezența SFD autoechilibrat ($R_d = 0$), sau chiar absent ($R_d \equiv 0$). Cu aceste date de intrare singura întrebare rezonabilă potrivită în problema directă a staticii PMLB este cea referitoare la identificarea PES (având caracter permanent), în ipoteza $v_0 = 0$. Să explicăm acest aspect. Se scrie sistemul de ecuații scalare de echilibru conform legii fundamenatele, în forma specifică folosind o schemă de forțe valabilă pentru o poziție curentă a PM și configurația corespunzătoare a SF concurente, respectiv pentru un anumit moment de referință

$$\bar{R}_d\,(t, \bar{r}) = 0\ (\dot{H} = 0 \rightarrow \ddot{r} = 0) \rightarrow \dot{r} = \bar{v}_0 \rightarrow \bar{r} = \bar{v}_0\,t + \bar{r}_0\ ;\ \bar{r} = \bar{r}_0 \quad (15)$$

Se pune mai întâi întrebarea dacă condiția de echilibru scrisă pe o configurație instantanee rămâne valabilă în regim permanent și apoi care sunt rădăcinile sistemului de ecuații amintit și, implicit în ce condiții aceste rădăcini au caracter permanent; rădăcinile sistemului de ecuații scalare de echilibru trebuie să fie vectorii de poziție ai mulțimii PES. În acest context reținem că pentru ca SFD să rămână compatibile cu echilibrul, schema de forțe concurente curentă cu care operăm trebuie să îndeplinească următoarele condiții: **a)** să existe garanția că forțele respective rămân concurente în regim permanent (această condiție este asigurată de calitatea PM de obiect al acțiunii SF fără de care SF însuși nu se poate manifesta), și **b)** să existe garanția că schema de forțe respectivă rămâne compatibilă cu echilibrul în regim permanent. La punctul 5 de la capitolul următor sunt redate câteva situații pentru care garanția amintită trebuie quasi static susținută” cu argumente rezonabile de ordin fenomenologic. (Această garanție poate rezulta și fi confirmată prin calcul, urmărind natura rădăcinilor ecuațiilor de echilibru).

- **Problema mixtă a staticii PM** vizează cazul în care obiectul acțiunii SF concurente echivalent cu zero este un PMLG care are NGL = 1 (există două legături simple, olonome, scleronome, și independente), sau NLG = 2 (există o singură legătură simplă, olonomă și scleronomă). În acest caz efectul necunoscut este vectorul $\bar{r}$ în poziția de repaus a PM pentru Condiții Inițiale (CI) cu $v_0 = 0$ și reacțiunile, în ipoteza legăturilor independente (NED = 0).

- **Problema inversă a staticii PM** vizează PMLG în cazul particular în care acesta este fixat prin legături. Ca și în problema mixtă, ne vom limita la cazul în care NED = 0 (cele trei legături simple sunt independente, blocând astfel toate cele trei grade de libertate). În acest caz special sistemul de legături fixează PM în unica poziție de repaus (echilibrul static) în mod independent de SFD putând apărea și reacțiuni dinamice în cazul în care SFD etse funcție de timp.

De ce are statica două obiective

1. Cele două obiective ale staticii sunt : **(1)** Clasificarea SFD în cele două – patru cazuri de reducere, în conformitate cu legea fundamentală aplicând operațiile de echivalență a SF și **(2)** analiza primei variante a stării mecanice inerțiale a PM/SR (repaus absolut), aflat sub acțiunea unui SFD (problema directă a staticii), sau sub acțiunea conjugată a SFD + SFLG

(problema inversă și problema mixtă); în toate cele trei tipuri de problemă ale staticii sistemele de forțe care intervin sunt echivalente cu zero.

2. Primul obiectiv al staticii se formulează de pe o poziție plasată în afara domeniului static, în care LF este nebifurcată; acest mod de a privi lucrurile are o explicație didactică, bazându-se pe principiul conform căruia „două sisteme SFD sunt echivalente dacă produc același efect asupra PM/SR căruia i se „aplică”), dar lăsând în umbră, ca subînțeles efectul. Se poate produce astfel prima decuplare a legii fundamentale în care cazul echilibrului este numai unul din cele 2- 4 posibile.

3. Același prim obiectiv al staticii poate fi privit și din interiorul domeniului staticii bazându-se pe formula fundamentală bifurcată (cea de a doua decuplare). Compunerea/ reducerea sunt condiționate și nu se realizează cu scopul de a clasifica SF analizat, ci de a-l aduce la forma cea mai simplă echivalentă, pentru a simplifica astfel aplicarea formulei fundamentale în regim static. Privind astfel lucrurile primul obiectiv al staticii apare ca o primă fază a celui de al doilea obiectiv.

4. Rolul factorului timp în cele două ipostaze ale primului obiectiv al staticii

În prima ipoteză (prima decuplare a formulei fundamentale) factorul timp se manifestă prin „migrația” unui SFD de la un caz de reducere la altul (operațiunile elementare de echivalență nu depind de structura analitică a forțelor). În cea de a doua ipostază (a doua decuplare a formulei fundamentale) ecuația de echilibru trebuind să reziste în regim permanent, timpul este exclus din rândul argumentelor expresiilor $\bar{R}_d$ și $\bar{R}_l$, astfel încât în condiția de echilibru avem $\bar{R}_d(\bar{r}) + \bar{R}_l(\bar{r}) = 0$. În acest context redăm în continuare câteva exemple de SFD compatibile cu echilibrul în regim permanent.

5. Exemple de SF concurente care pot fi compatibile cu echilibrul

(i)→ $|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2| = |\bar{F}_3|$ și direcții fixe $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$;

(ii)→ $k|\bar{F}_1| = k|\bar{F}_2| = k|\bar{F}_3|$, direcții fixe și moduli direct proporționali cu factori de proporționalitate arbitrari; în ambele aceste cazuri forțele sunt invariabile spațiu-temporal;

(iii) → $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ forțe elastice de aceeși constantă de proporționalitate și direcții fixe (variantă sugerată de precedenta); în acestă variantă forțele sunt funcții numai de poziția punctului lor de concurență;

(iv) → $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ forțe armonice în fază, de direcții fixe

$$\bar{F}_1 = F_0\ \bar{u}_1 \sin pt\ ,\ \bar{F}_2 = F_0\ \bar{u}_2 \sin pt\ ,\ \bar{F}_3 = F_0\ \bar{u}_3 \sin pt \qquad (16)$$

unde direcțiile fixe sunt $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$.

Exemplul (iv) de mai sus evidențiază că forțele componente ale SFD concurente și compatibile cu echilibrul pot depinde explicit de timp , cu condiția ca $\bar{R}_d$ să nu depindă explicit de timp. Prin formularea potrivită a enunțului exemplele prezentate mai sus se pot adapta pentru cel de al doilea obiectiv al staticii (vezi de exemplu PM de greutate $\bar{G}$ suspendat cu două fire trecute peste doi scripeți punctiformi ficși, coroborat cu cele trei cazuri de descompunere a unei forțe în două componente pe suportul său).

6. Încadrarea unui probleme date în primul obiectiv al staticii (sisteme echivalente de forțe) , sau în cel de al doilea obiectiv, (care îl conține și pe primul ca primă fază a analizei stării mecanice a unui PM) poate fi dirijată printr-o formulare adecvată a enunțului. Ca exemplu ilustrativ în acest sens se poate da problema prezentată în mod obișnuit în cursurile studențești, în cele trei variante de echilibru ale PM (al doilea obiectiv al staticii) și corespondentele sale ca probleme de SF concurente echivalente (primul obiectiv al staticii).

7. Separarea celor două obiective ale staticii, efectuată de altfel în mod convențional, are și un efect pozitiv : dezvoltarea teoriei vectorilor alunecători având ca element central noțiunea de torsor în cadrul grupului extins al operațiunilor elementare de echivalență a sistemelor de vectori alunecători; și mai departe extinderea legii fundamentale clasice la formularea teoremelor generale ale mecanicii clasice și replica lor în regim static, teorema torsorului.

8. Extinzând primul obiectiv al staticii de la SF concurente (vectori legați) cu acțiune asupa unui PM la SF oarecare (vectori alunecători) cu acțiune asupara unui SR, (pe baza introducerii noțiunii de torsor) ajungem în final la tabloul sinoptic al cazurilor de reducere unde cele două cazuri existente la SF concurente (Echilibru, Rezultantă Unică) se extind la patru cazuri (Echilibru, Cuplu, Rezultantă Unică și Dinamă). Ne propunem să analizăm în continuare sensul corect al acestui enunț: „Tabloul sinoptic cu care se încheie tratarea primului obiectiv al staticii depășește de fapt cadrul staticii, deoarece se aplică și în regim dinamic, pentru orice SF”. Deși afirmația în sine poate fi acceptată ca adevăr, totuși trebuie subliniat că schemele de forțe care se folosesc în problemele inscriptibile în cadrului primului obiectiv al staticii (Sisteme Echivalente de Forțe) nu conțin forțe dependente explicit de timp, ceea ce conferă încadrării SF analizate un

caracter permanent, static. În același context se face uneori aprecierea conform căreia cazurile de reducere au valoare de naturi posibile ale SF analizate. În acest demers accentul va cădea pe semnalarea unei eventuale, exagerări a puterii de reprezentare a încadrării SF în cele patru cazuri de reducere deduse de pe poziția staticii, datorită eludării factorului timp. Mai exact aplicarea grupului operațiunilor elementare de echivalență și respectiv a reducerii SF în raport cu un pol ca operație complexă de echivalență se face în conformitate cu reguli de calcul și definiții independent de structura analitică a funcțiilor care definesc SF. Aceste operațiuni de echivalență și definiții (definirea rezultantei, a momentului rezultant, etc.) se efectuează în mod independent de factorul timp, pe o schemă de forțe curente. Astfel, un SF oarecare (vectori glisanți care acționează asupa unui SR) aparține în mod cert unuia dintre cele 4 cazuri de reducere , (în sensul că alte cazuri nu există); însă în general un SF oarecare , $\bar{\boldsymbol{F}}_i = \bar{\boldsymbol{F}}_i\,(t, \bar{\boldsymbol{r}}, \dot{r})$ poate trece de la un caz de reducere la altul în decursul timpului; ceea ce se și întâmplă în regim dinamic, lucru manifestat și prin neindividualizarea reducerii SF ca prim obiectiv al dinamicii la scrierea teoremei torsorului. În regim dinamic dependența SF de timp este de la sine înțeleasă, deși nu este obligatorie; astfel încât separarea cauzei de efectul său nu are sens.

Teorema de echilibru pentru PM

Teorema de echilibru este un enunț care încercă să îl depășească pe cel formulat în mod obișnuit în literatură, care este în realitate o simplă definiție. Astfel enunțul „Un punct material este în echilibru dacă rezultanta SF care îi revin este nulă”, nu depășește statutul de definiție a SF concurente echivalente cu zero (primul obiectiv al staticii), care transferă în mod convențional o caracteristică a SF concurente (starea de echilbru) la PM căruia i se aplică acel SF. Acest transfer, deși neriguros, constituie totuși un demers simplificator, plasat sub semnul unui convenționalism semantic contolat, care are meritul de a invoca PM ca obiect al acțiunii SF concurente, apropiindu-se astfel de cel de al doilea obiectiv al staticii. Enunțul teoremei are la bază legea fundamentală sub forma decuplată (fiind formulat astfel încât să constituie un instrument de calcul în spiritul celui de al doilea obiectiv al staticii): „*Dacă un SF concurente care revin unui PM este compatibil cu echilibrul în regim permanent (pentru orice moment $t \geq t_0$, unde momentul inițial t_0 este ales în mod arbitrar) și dacă PM căruia i se aplică acel SF este în repaus absolut (v_0 = 0) în același moment t_0 ocupând o poziție $\bar{\boldsymbol{r}}_0$ care aparține mulțimii Pozițiilor de Echilibru Static* *care caracterizează SF menționat, atunci PM rămâne în repaus absolut, în același interval de timp".* Reciproca acestei teoreme este adevărată avînd următorul enunț sub o formă simplificată „Dacă un punct material se află în stare de repaos absolut (sau efectuează o MRU) într-un interval de timp [t_0, t_1], atunci SF care acționează asupra sa este echivalent cu zero în același interval de timp". Practic în ambele variante se operează cu sistemul

$$\bar{R}_d(\bar{r}) + \bar{R}_l(\bar{r}) = 0, \text{ și } \dot{\bar{H}} = 0 \qquad (17)$$

În ambele enunțuri ipoteza și concluzia se implică reciproc în pofida independenței lor operaționale, pe fondul independenței reale a condițiilor inițiale în raport cu statutul sistemului de forțe. Cu alte cuvinte, se pune problema exprimării explicite a condiției de garantare a ipotezei care va implica producerea concluziei. Practic garanția respectării condiției de echilibru apare numai în cazul punctului material izolat, prin ipoteza absenței SF (teorema directă) și în cazul problemei inverse (care vizează punctul material fixat prin legături), pentru reciproca teoremei. În cazul punctului material izolat, a cărui stare mecanică intră sub incidența principiului inerției, absența SF are ca efect suprapunerea mulțimii PES cu E_3 și, pe cale de consecință acceptarea deopotrivă a condițiilor inițiale absolut arbitrare ; în cazul problemei inverse fixarea PM prin legături asigură o singură PES admițând numai condiții inițiale statice. Cu aceste excepții , în restul problemelor de statică (problema directă (PMLB) și problema mixtă (PMLG) compatibilitatea SF concurente este previzibilă prin calcul, respectiv prin rezolvrea sistemului de ecuații scalare de echilibru corespunzătoare, care trebuie să aibă rădăcini reale (mulțimea PES nevidă).

Mențiunea „SF concurente care revin PM este compatibil cu echilibrul", în locul formulării „SF concurente este echivalent cu zero" are rostul de a face distincția cuvenită între o caracteristică mecanică proprie a SF concurente (aceea de echivalență cu zero), făcută în spiritul primului obiectiv al staticii, în mod independent de PM care face obiectul acelui SF, și echivalența cu zero ca realitate posibilă, numai dacă PM respectiv, care coincide pozițional cu punctul de concurență a SF se află în condiții inițiale corespunzătoare ($v_0 = 0$ și $P_0 \in$ PES). Dat fiind faptul că aceste condiții inițiale sunt independente de SF, luarea lor în calcul asigură transformarea unei posibilități în realitate conform cu cel de al doilea obiectiv al staticii și cu respectarea ambelor ecuații decuplate (deoarece ele formează un sistem). Din punct de vedere pur matematic această ipoteză poate fi subînțeleasă, dar din punct de vedere fenomenologic ea trebuie relevată explicit, deoarece instaurarea efectivă a stării de repaos a PM nu poate avea loc respectând numai condiția de echilibru a SF; de exemplu SFD corespunzător pendulului elastic posedă o PES (fiind deci compatibil cu echilibrul) însă PMLB nu ramâne în aceea poziție , decât dacă la un moment dat el se află în stare de repaos în aceea PES.

Mențiunea în regim permanent are rostul de a preciza că cele două ecuații rezultate prin decuplarea ecuației fundamentale sunt valabile pentru orice moment $t \geq t_0$, la fel ca și formula fundamentală clasică de la care provin; pentru ca să se întâmple acest lucru este necesar ca în cele două ecuații decuplate să nu figureze argumentul timp. În acest context facem următoarea remarcă : acceptarea în regim instantaneu, ci nu permanent a celor două egalități decuplate poate încălca regimul static ; astfel egalitatea $\dot{\bar{H}} = 0$ considerată instantaneu semnifică o condiție de extrem pentru funcția $\bar{H}(t)$, ci nu condiția $\bar{H}$ = ct.

Teorema conservării impulsului (dedusă matematic din legii fundamentale pentru cazul particular în care SF concurente care revin PM este echivalent cu zero) condiționează conservarea impulsului de proprietatea sistemului de forțe concurente respectiv, de a rămâne în echilibru ulterior momentului t_o ; proprietate pe care legea fundamentală și teorema conservării impulsului nu o garantează, ci o conține numai ca o ipoteză; întradevăr, legea fundamentală garantează egalitatea $\bar{R}_d + \bar{R}_l = \dot{\bar{H}}$, dar nu garantează separarea acestei egalități în două ecuații în urma egalării cu zero a unuia dintre cei doi membri, ci numai stipulează această egalitate pentru unul din cei doi membri, dacă celălalt e nul în mod garantat, în regim permanent, unde garanția provine din surse independente de legea fundamentală însăși.

- **Teorema de echilibru între primul postulat și teorema conservării impulsului**

a) În cazul primului postulat, PM este izolat , astfel încât condiția de echilibru al SF este garantată printr-o ipoteză rezonabilă de ordin fizic, iar condițiile inițiale sunt absolut arbitrare putând antrena deopotrivă ambele variante ale stării mecanice inițiale; această garanție lipsește în general în cazul PMLB / LG, **b)** Teorema de echilibru reprezintă varianta statică a teoremei conservării impulsului care, la rândul său constituie o consecință a legii fundamentale dedusă din aceasta pe cale matematică, pentru un caz particular.

Remarcăm că în pofida asemănării dintre teorema conservării impulsului și respectiv condiția de echilibru a SF concurente pe de o parte și postulatul inerției pe de altă parte, există cel puțin o deosebire esențială între ele : postulatul inerției se referă la un PM izolat, deci PM liber în absența SF asigurând prin ipoteza de izolare o stare mecanică inerţială în oricare din cele două variante, (în funcţie de condiţii iniţiale absolut arbitrare), pe când teorema conservării impulsului are loc în prezenţa unui SF echivalent cu zero, în regim permanent pentru care mulţimea PES nu ocupă întregul E_3 (aşa cum e cazul cu primul postulat). Una din consecinţele acestei deosebiri constă în faptul că deoarece în cazul teoremei conservării impulsului condiţiile iniţiale nu pot fi în general arbitrare, varianta MRU a stării mecanice inerţiale nu constituie singura alternativă la repaus, ea nefiind posibilă decât în cazuri de excepţie, atât pentru PMLB, cât şi pentru PMLG.

Confundarea postulatului inerţiei cu teorema conservării impulsului constituie o eroare gravă care ar submina legitimitatea prezenţei primului postulat printre cele trei postulate ale mecanicii clasice, prin interpretarea sa ca simplă consecinţă a postulatului al doilea. În realitate teorema conservării impulsului reprezintă într-adevăr o consecinţă de factură matematică a legii fundamentale, pe când primul postulat are o semnificaţie specială: evidenţierea inerţiei ca proprietate generală intrinsecă a corpurilor (în absenţa SF) marcând şi invarianţa legii fundamentale în raport cu reperele inerţiale.

Extinderea legii fundamentale de la PMLB la SM

În cele ce urmează vor fi relevate două aspecte: **a)** legea fundamentală privită ca bază obiectivă a formulării condiţiilor de echivalenţă şi clasificarea sistemelor de forţe în cazul general (nu numai al sistemelor de forţe concurente) şi **b)** legea fundamentală privită ca raport cauzal şi instrument de studiu al stării sistemelor mecanice.

a) În esenţă acest aspect se referă la trecerea de la compunerea SF concurente (vectori legaţi) conform regulii paralelogramului, la reducerea sistemelor de forţe oarecare (vectori glisanţi) pe baza introducerii noţiunii de torsor; astfel tabloul sinoptic al cazurilor de reducere al sistemului de forţe conţine el însuşi două aspecte: (i) trecerea de la SF concurente aplicate unui PM la SF oarecare aplicate unui SR , (ceea ce reprezintă asocierea a SF cu obiectul acţiunii lor care apare tocmai pe fondul unei disocieri a cauzei de obiectul acţiunii sale şi (ii) realizarea unei clasificări (cazurile de reducere) cu valabilitate în regim dinamic , deşi acest demers s-a realizat de pe poziţii statice (cu unele dezavantage decugând tocmai din această viziune statică);

b) Extinderea precedentă s-a repercutat în mod firesc şi asupra aplicării legii fundamentale ca instrumet de analiză a stării mecanice al oricărui SM. Ceea ce ridică problema încadrării LF ca element de bază în grupul teoremelor generale ale dinamicii.

Încadrarea legii fundamentale ca element de bază în grupul celor trei teoreme generale ale dinamicii. Prin introducerea noțiunii de impuls, $\bar{\boldsymbol{H}}$, în expresia (2) a legii fundamentale, a aceleia de moment cinetic $\bar{\boldsymbol{K}}_o$, energie cinetică E și lucru mecanic elementar dL, legea fundamentală a condus la formularea celor trei teoreme generale ale dinamicii: teorema impulsului, teorema momentului cinetic și teorema energiei; printr-un raționament speculativ primele două teoreme pot fi privite împreună sub titulatura de teorema torsorului. În condiții restrictive referitoare la sisteme de forțe, teorema torsorului se particularizează la regimul static, pentru care teorema conservării impulsului (la care se adaugă teorema conservării momentlui cinetic și teorema conservării energiei), teorema de echilibru a PM, constituie forma de exprimare a celor două variante ale stării mecanice inerțiale a PM.

Extinderea grupului celor trei teoreme generale de la PM la SR și apoi la sisteme de solide rigide decurge în mod natural înlocuind rezultanta SF concurente care acționează ca vectori legați asupra PM cu torsorul SF care acționează asupra SR ca vector glisanți și, bineînțeles înlocuind impulsul, momentul cinetic și energia cinetică corespunzătoare PM cu omoloagele lor valabile pentru SR (vezi teorema mișcării centrului de masă etc.).

Extinderea grupului celor trei teoreme generale de SR la SPM se face în principiu apelând la axioma eliberări conform căreia ecuațiile cu care se operează în cadrul fiecăreia dintre cele trei teoreme generale se pot aplica atât SPM în ansamblu (metoda solidificării), cât și oricărei părți a SPM (metoda părților), fie că acestea sunt părți indivizibile, adică PM/SR , eventual sisteme rigide de puncte materiale, fie, că sunt părți divizibile, adică subansambluri de PM/SR ale SPM . În același context schemele de forțe corespunzătoare celor două metode sunt marcate esențial și de respectarea postulatului al treilea. În fine, metoda părților indivizibile posedă puterea maximă de acoperire , iar medota solidificării se află la polul opus.

Modelele torsorial / energetic. Cele trei teoreme generale acoperă în mod direct partea de mecanică vectorială care poate fi considerată zestrea directă a modelului Newtonian. Puntea de legătură dintre mecanica vectorială și mecanica analitică o constituie principiul lui d Alembert care aparține modelului torsorial al mecanicii clasice. Trecerea de la teorema energiei la principiul lucrului mecanic virtual și la ecuațiile lui Lagrange de speța a doua reprezintă modelul energetic, o formă revoluționară de mare rafinament care a adus modelul newtonian la forma actuală de exprimare.

Bibliografie:

[1] Alexandrescu M., „*Mecanica Teoretică”*, Fundamentele mecanicii şi Statica, Vol. I, Editura Leda, Constanța, 1996

[2] Bălan Ș., Ivanov I., „*Din istoria mecanicii”*, Editura Științifică, 1966

[3] Caius I., „*Din Istoria Mecanicii”*, în Gazeta Matematică, nr. 1/1971

[4] Newton I., „*Principiile matematice ale filozofiei naturale”*, traducere din limba latină de prof. Marian V., Editura Academiei RPR, 1956

[5] Plăcințeanu I., „*Mecanica vectorială și analitică”*, ediția a doua, Editura Tehnică, București, 1958

[6] Vâlcovici V., Bălan Ș., Voinea R., „*Mecanica Teoretică”*, ediția a doua, Editura Tehnică, București 1963.